ЛА - 16.10.12

$x^2 - (3-2i)x + (6-5i) = 0$

$x_{1,2} = \frac{3-2i \pm \sqrt{9-12i-4-20+20i}}{2} =$

$\frac{3-2i+\sqrt{-15+8i}}{2} = \frac{3-2i+\sqrt{16+2(4i)\cdot 1+1}}{2} =$

$\frac{3-2i+\sqrt{(4i+1)^2}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3-2i+4i+1}{2} = 2+i$

$x_2 = \frac{3-2i-4i-1}{2} = 1-3i$

Нека $i_1, i_2 \dots i_n$ е перидукция на числата $1 \dots n$
Казваме че числата i_p и i_q образуват инверсия
ако $i_p < i_q$ но $p > q$

$[i_1, i_2 \dots i_n]$ формула $\frac{n(n-1)}{2}$ - инверсии

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$ Детерминанта

$S_n \{ i_1, i_2 \dots i_n \mid i_1, i_2 \dots i_n$
перидукция на числата $1 \dots n$

$$\sum_{i_1 i_2 - i_n}^{[i_1, i_2 - i_n]} (-1)^{} a_{1 i_1}, a_{2 i_2}, \dots a_{n i_n}$$

Свойства

① $\det A = \det A^t$

② Ако има нулев ред то $\det A = 0$

③ Ако $a_p = a'_p + a''_p$ то $\det A = \det(\overline{a_p}) = \det(\overline{a'_p}) + \det(\overline{a''_p})$

④ Ако $p \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1}, a_n \\ a_{i1} & \dots & \lambda a_{ip} - \lambda a_{np} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \det A$

⑤ Ако има 2 еднакви реда то $\det A = 0$

⑥ Ако разменим местата на 2 реда то $\det A$ си сменя знака

⑦ Ако към даден ред прибавим друг множител $-\det A$ не се променя

⑧ Ако редовете са линейно зависими то $\det A = 0$

Задача

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 = L_3 + 3L_1 \\ \Longrightarrow \\ L_4 = L_4 + L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

от L_3 и L_4 няма

$\Rightarrow$

$\Delta = 0$

два еднакви реда

Развиване на детерминанта по ред и стълб

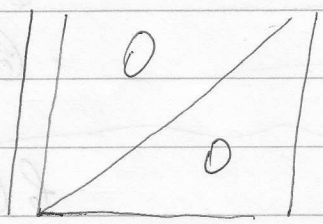
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{I стълб}]{\text{I ред}} (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} +$$

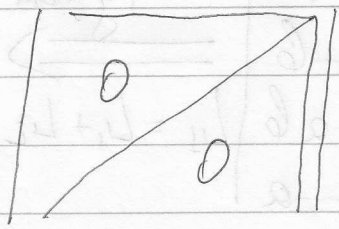
$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Развиване на детерминанта по трети стълб

$$2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Детерминанти в стил „пчели крак"





Примери за решения на „пчели крак"

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a & b \\ b & \dots & \dots & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots \\ a & b & 0 & \dots \\ 0 & a & b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a & b \end{vmatrix} =$$

Столбец

$$a a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

Пример 2

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{n-1}$$

вадим от 1 ред и 1 столбец

перестановки $= n!$; инверсии $= \frac{n(n-1)}{2}$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

прибавяме всеки ред към L_1

$L_1 = L_1 + L_i$

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \Rightarrow$$

1 ред

$$(a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b \\ b & b & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

умножаваме 1 ред с b и после вадим

$L_i = L_i - b L_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a-b \end{vmatrix} (a+(n-1)b$$

$\Rightarrow (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$